Heute: • Satz von Schwarz und Hesse-Matrix
• Satz von Taylor ⟶ praktischer Rechentrick
• Lokale Extrema

UMFRAGE AUSFÜLLEN :U

24 13

Nachbesprechung Aufgabe 3.

$$P(T,V) = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{n^2 a}{V^2}$$

Lineare Näherung von $P(T,V)$ gibt das totale Differential...

$$dP = \frac{\partial P}{\partial T} dT + \frac{\partial P}{\partial V} dV$$

Es gilt: $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V-nb}$, $\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{nRT}{(V-nb)^2} + \frac{n^2 a}{V^3}$

$$\Longrightarrow dP = \frac{nR}{V-nb} dT + \left(\frac{n^2 a}{V^3} - \frac{nRT}{(V-nb)^2}\right) dV$$

4.6 Höhere Ableitungen und Hesse-Matrix

Der Satz von Schwarz besagt, dass für genügend reguläre Funktionen (d.h. C^2) die Reihenfolge der Differentiation keine Rolle spielt.

Satz 4.24 (Satz von Schwarz)
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion, dann gilt

$$\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f.$$

Das heisst für zweimal stetig differenzierbare Funktionen ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen egal!

Definition 4.26 (Hesse-Matrix)
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Wir definieren die Hesse Matrix von $f \in C^2(U)$ an der Stelle $x \in U$ als die 2×2-Matrix

$$(Hf_x)_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

im (i,j)-Matrixeintrag steht die Ableitung nach x_i und x_j

für $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Der Satz von Schwarz (siehe 4.24) impliziert, dass $Hf(x)$ eine symmetrische Matrix ist. Eine alternative Standardnotation für die Hesse Matrix ist $D^2 f(x)$.

explizit bei nur zwei Variablen ⟹

Beispiel 4.27 (Hesse-Matrix berechnen)
Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist die Hesse-Matrix eine 2×2-Matrix:

$$Hf = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f \end{bmatrix}.$$

Nach dem Satz von Schwarz gilt $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f$, also ist die Matrix symmetrisch.

Beispiel 4.28 (Hesse-Matrix berechnen)
Sei $f(x,y) = x^3 + xy^2 - y^3$. Wir berechnen die Hesse-Matrix:
Erste Ableitungen:

$$\partial_x f = 3x^2 + y^2, \quad \partial_y f = 2xy - 3y^2.$$

Zweite Ableitungen:

$$\partial_{xx} f = 6x, \quad \partial_{xy} f = 2y, \quad \partial_{yy} f = 2x - 6y.$$

Die Hesse-Matrix ist:

$$Hf = \begin{bmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x - 6y \end{bmatrix}.$$

- Intuitiv speichert die Hesse-Matrix die Krümmungsinformationen der Funktion.
- Analog wie der Gradientenvektor die Steigungsinformationen speichert.

Taylorentwicklungen für Skalarfelder

Was bisher geschah...

Wir wissen, dass das (totale) Differential die beste lineare Approximation der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ darstellt. Also

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0)(x - x_0, y - y_0).$$

Daraus folgt dann, dass

$$\boxed{P_1(x,y) = f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y - y_0)}$$

+ 2. Ableitungen

Bemerkung 4.29 (Taylorpolynom zweiter Ordnung eines Skalarfeldes)
Das Taylor-Polynom zweiter Ordnung für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle (x_0, y_0), können wir mithilfe des Gradienten ∇f und der Hesse-Matrix Hf hinschreiben:

$$\boxed{P_2(f(x,y)) = f(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle (x - x_0, y - y_0), Hf_{(x_0,y_0)}(x - x_0, y - y_0) \rangle.}$$

Es gibt auch eine allgemeine Formel für die Approximation n-ter Ordnung, diese benötigt jedoch sogenannte Multiindexnotation und ist kompliziert aufzuschreiben.

+ in der Praxis oft unnötig ⟹ clever Rechentrick...

Wie rechnet man mit Taylor in der Praxis?

Rechenmethode 4.33 (Mehrdimensionale Taylor-Approximation)
Um mehrdimensionale Taylor-Approximationen zu berechnen, haben wir die Möglichkeiten

1. für jede Variable einzeln die eindimensionale Taylor-Approximation einzusetzen
2. mehrere Argumente zu gruppieren und zu substituieren, z.B. $t = x^2 + y^2, s = xy, \dots$

Falls sich die Funktion nicht in bekannte eindimensionale Taylor-Approximationen zerlegen lässt, dann kann man auf die bekannten Formeln für eine und zwei Dimensionen zurückgreifen.

Achtung: Die bekannte Potenzreihenentwicklung muss mit der Entwicklungsstelle übereinstimmen!

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \cdots \qquad \cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \cdots$$

Beispiel 4.34 (Taylorentwicklung)
Wir suchen das Taylor-Polynom von $f(x,y) = \sin(x)\cos(y) + 1$ bis zur 3. Ordnung. Dafür nutzen wir Methode 4.33 und setzen die Taylor-Polynome für $\sin(x)$ und $\cos(y)$ einzeln ein.

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - \frac{y^2}{2}\right) + 1 = 1 + x - \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} + \cancel{\frac{x^3 y^2}{12}}.$$

Der letze Term skaliert im Betrag jedoch wie ein Term 5. Ordnung. Das Taylor-Polynom bis zur 3. Ordnung ist damit

$$P_3(x,y) = 1 + x - \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2}.$$

Beispiel 4.35 (Taylorentwicklung)
Wir suchen das Taylor-Polynom von $g(x,y) = \cos(x^2 + y^2) - 1$ bis zur 4. Ordnung. Dafür nutzen wir Methode 4.33 und substituieren mit $t = x^2 + y^2$. Es folgt für das Taylor-Polynom $\cos(t) = 1 - t^2/2 + \cdots$
Damit können wir einsetzen

$$1 - \frac{t^2}{2} - 1 = -\frac{(x^2 + y^2)^2}{2} = -\frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{2} = -\frac{1}{2}x^4 - x^2y^2 - \frac{1}{2}y^4$$

Das Taylor-Polynom 4. Ordnung ist daher

$$P_4(x,y) = -\frac{1}{2}x^4 - x^2y^2 - \frac{1}{2}y^4.$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{5!} - \cdots$$

Aufgabe [2023 S] Gegeben sei die Funktion

$$g(x,y) = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + 5\right) e^{y^2}.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von der Funktion $g(x,y)$ an der Stelle $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Aufgabe: Taylorpolynom von $f(x,y) = \sin(xy)$ um $(0,0)$ bis zur Ordnung 4.

5.1 Kritische Punkte und lokale Extrema

$f(x,y) = \sin(xy) \approx xy - \cancel{\frac{x^3y^3}{6}} \approx xy$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und nicht-leer. Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen Ableitungen und Extrema von reellwertigen Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$. Wie bei Funktionen einer Veränderlichen ist das Verschwinden der Ableitung eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Extremums.

Definition: lokales Extremum

Bemerkung 5.1
Ein Punkt $(x_0, y_0) \in U$ heisst ein **lokales Maximum** von f, wenn es ein $r > 0$ gibt, sodass $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ für alle $(x, y) \in B_r(x_0, y_0)$ gilt. Hierbei ist $B_r(x_0, y_0)$ eine Kreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ um den Punkt (x_0, y_0) mit Radius r. Das zweidimensionale Analogon zu einem offenen Intervall. Ein Punkt (x_0, y_0) heisst ein **isoliertes lokales Maximum** oder ein **striktes lokales Maximum**, wenn es ein $r > 0$ gibt, sodass $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ für alle $(x, y) \in B_r(x_0, y_0)$ mit $(x, y) \neq (x_0, y_0)$. Die Definition eines **lokalen Minimums** ist analog, und zusammengefasst bezeichnen wir sie als **lokale Extrema**.

Satz 5.2 (Kritische Punkte in offenen Mengen)
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion, und sei $(x_0, y_0) \in U$ ein Punkt, an dem f differenzierbar ist und ein lokales Extremum annimmt. Dann gilt $\partial_i f(x_0, y_0) = 0$ für $i = x, y$. Mit anderen Worten, $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ und (x_0, y_0) ist ein kritischer Punkt von f.

$\nabla f(x_0, y_0) = 0$ ist eine <u>notwendige</u> Bedingung!

NICHT hinreichend!

Notwendig: lokales Extremum $\xRightarrow{\text{Satz 5.2}} \nabla f = 0$

Hinreichend: $\nabla f = 0 \not\Rightarrow$ lokales Extremum